Fonction Réciproque.

EXERCICE N°1 :

Pour chacune des fonctions ci-dessous :

a- Monter que f réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

b- Calculer $f^{-1}(3)$ et $f^{-1}(4)$.

c- Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

1/ $f(x) = \sqrt{x-2}$; $I = [2,+\infty[$

2/ $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}$; $I =]2,+\infty[$

EXERCICE N°2 :

Soit la fonction f définie sur $[-2,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{2x+4} - 1$

1/ Etudier la dérivabilité de f à droite en –2. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2/ a- Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-2,+\infty[$.

b- En déduire que f réalise une bijection sur un intervalle J, que l'on précisera.

3/ Soit f^{-1} la fonction réciproque de f.

a- Déterminer le domaine de continuité de f^{-1} et son sens de variation.

b- Montrer que f^{-1} est dérivable en -1.

c- Calculer f(0) en déduire $(f^{-1})'(1)$.

4/ Expliciter $f^{-1}(x)$ en fonction de x pour tout $x \in J$.

EXERCICE N°3 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2-9} - x$.

On désigne par (ζ_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1/ Montrer que f est définie sur $]-\infty,-3] \cup [3,+\infty[$.

2/ Montrer que la droite Δ : y = 0 est asymptote à (ζ_f) au voisinage de $+\infty$.

3/ a- Montrer que Δ' : y = -2x est une asymptote à (ζ_f) au voisinage de $-\infty$.

b- Etudier la position de (ζ_f) par rapport à Δ' .

4/ a- Etudier la dérivabilité de f à droite en 3 et à gauche en –3.

b- Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

5/ a- Montrer que f est dérivable sur $]-\infty,-3[\cup]3,+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}} - 1$.

b- Montrer que f strictement décroissante sur $]-\infty,-3]$ et strictement croissante sur $[3,+\infty[$.

c- Dresser le tableau de variation de f.

6/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $[3,+\infty[$.

a- Montrer que g réalise une bijection de $[3,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b- Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[-3,0[$

c- Calculer $g^{-1}(-1)$, en déduire $(g^{-1})'(-1)$

d- Expliciter $g^{-1}(x)$ pour $x \in J$.